6. cvičení - řešení

Příklad 1 (a) $f(x,y) = e^x$ a $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + 2y^2 \leq 1\}$

Funkce f nezávisí na proměnné y, proto nás budou zajímat M^y (respektive nás zajímá $\cup_{y\in\mathbb{R}} M^y$). Množina M je elipsou, přičemž x-ová poloosa je 1. Vidíme, že největší M^y je $[-1,1]$. O funkci e^x víme, že je rostoucí. Z toho dostáváme, že $\max_M f(x,y) = \max_{x\in[-1,1]} e^x = e$ a $\min_M f(x,y) = \min_{x\in[-1,1]} e^x = e^{-1}$.

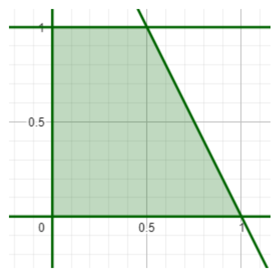
Určeme ještě, kde f svých maxim a minim nabývá v množině M. Maxima nabývá v případě, že $x = 1$. Aby $[1,y] \in M$, musí platit, že $1^2 + 2y^2 \leq 1$, tedy $y^2 \leq 0$, tedy $y = 0$. Proto f nabývá svého maxima na množině M nabývá pouze v bodě $[1,0]$. Podobně se odvodí, že minima na M nabývá pouze v bodě $[-1,0]$.

Příklad 1 (b) $f(x,y) = x$ a $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x \in [0,2], y \in [0,1], 2x + y \leq 2\}$

Zřejmě platí, že $M \subset B(0,3)$, neb maximální hodnota $\sqrt{x^2+y^2}$ pro $x \in [0,2], y \in [0,1]$ je $\sqrt{5} < 3$. Množina M je tedy omezená. Ukážeme ještě, že M je uz. To nám dá, že M je kompaktní, dle věty **??**. Dle věty **??** pak budeme vědět, že funkce f na M nabývá extrémů.

$M = [2x + y \leq 2] \cap [x \geq 0] \cap [x \leq 2] \cap [y \geq 0] \cap [y \leq 1]$. Dle věty **??** je M průnikem uz. množin, dle věty **??** jde tedy o uz. mn.

Určeme tedy nyní supremum a infimum f na M a kde svých extrémů na M nabývá. Opět nás zajímají $M^y = \{x \in \mathbb{R} \colon [x,y] \in M\}$.



Z obrázku vidíme, že $\cup_{y\in\mathbb{R}} M^y = [0,1]$. Jelikož f je rostoucí v proměnné x dostáváme, že $\max_M f = f(1,y) = 1, \min_M f = f(0,y) = 0$.

Zřejmě f nabývá minima v bodech $[0,y], y \in [0,1]$, a maxima v bodě $[1,0]$.

Příklad 1 (c) $f(x,y) = x^2 + y^2$ a $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + 4y^2 = 1\}$

M je elipsa s poloosami $1, \frac{1}{2}$, proto $M \subset B(0,1)$. Navíc je dle věty **??** M uz., tedy dle věty **??** je komp. Dle věty **??** f, jelikož je spojitá, nabývá na M extrémů.

Platí, že $M = \left[x^2 = 1 - 4y^2, y \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right]$. Tedy platí

$$\{f(x,y) \colon [x,y] \in M\} = \left\{1 - 4y^2 + y^2 \colon y \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right\} = \left\{1 - 3y^2 \colon y^2 \in \left[0, \frac{1}{4}\right]\right\}.$$

Dostáváme $\{f(x,y) \colon [x,y] \in M\} = \left[\frac{1}{4}, 1\right]$. Pak $\max_M f = 1, \min_M f = \frac{1}{4}$. Funkce f nabývá maxima v případě, že $y = 0$, tedy v bodech $[\pm 1, 0]$, a minima v případě, že $y^2 = \frac{1}{4}$, tedy v bodech $[0, \pm\frac{1}{2}]$.

Příklad 1 (d) $f(x,y,z) = (x+y)^2 + (x-y)^2 + z$ a $M = [-1,1]^3$

M je krychle a jelikož je M zřejmě kompaktní a f spojitá, tak dle věty **??** f nabývá extrémů na množině M.

Zřejmě platí:

$$\begin{aligned}\sup_M f &= \sup\left\{(x+y)^2 + (x-y)^2 + z \colon x,y,z \in [-1,1]\right\} = \\ &= \sup\left\{2x^2 + 2y^2 \colon x,y \in [-1,1]\right\} + 1 = 5,\end{aligned}$$

$$\inf_M f = \inf\left\{2x^2 + 2y^2 + z \colon x,y,z \in [-1,1]\right\} = 0 + 0 - 1 = -1.$$

Zřejmě též platí, že f nabývá maxima v bodech $[1,1,1], [1,-1,1], [-1,1,1], [-1,-1,1]$ a minima v bodě $[0,0,-1]$.

Příklad 1 (e) $f(x,y) = x^2 + 12xy + 2y^2$ a $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; 4x^2 + y^2 = 1\}$

M je elipsa a podobně jako dříve se dá ukázat, že jde o kompaktní množinu a proto f nabývá na M extrémů.

Pomocí věty **??** zjistěme extrémy f na $\operatorname{Int} M$ a porovnejme je s hodnotami na $H(M)$.

Platí: $f'_x(x,y) = 2x + 12y, f'_y(x,y) = 4y + 12x$.

Zřejmě parciální derivace existují vě všech bodech $\operatorname{Int} M$. Vyšetřeme, zda jsou někde v $\operatorname{Int} M$ obě nulové.

$f'_x(x,y) = 0 \iff x = -6y, f'_y(x,y) = 0 \iff x = -\frac{1}{3}y$

Obě derivace jsou tedy závorveň nulové v případě, že $x = -6y$ a $-6y = -\frac{1}{3}y$, tedy pokud $x = y = 0$. Avšak $[0,0] \notin M$. Proto f svých extrémů nabývá na $H(M)$.

Jelikož $M = [y^2 = 1 - 4x^2]$, můžeme vyšetřovat maximum a minimum výrazu $f\left(x, \pm\sqrt{1-4x^2}\right)$ pro x t.ž. $0 \leq 1 - 4x^2$ - tj. pro $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

$f\left(x, \pm\sqrt{1-4x^2}\right) = x^2 \pm 12x\sqrt{1-4x^2} + 2\left(1-4x^2\right) = -7x^2 + 2 \pm 12x\sqrt{1-4x^2}$, přičemž $x^2 \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$. Provedeme-li substituci $a = x^2$, pak hledání extrémů funkce f na intervalu $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ přechází na hledání extrému funkce $\tilde{f}(a) = -7a + 2 \pm 12\sqrt{a - 4a^2}$ na intervalu $\left[0, \frac{1}{4}\right]$.

$$\tilde{f}'(a) = -7 \pm \frac{6\,(1-8a)}{\sqrt{a-4a^2}} = \frac{-7\sqrt{a-4a^2} \pm 6\,(1-8a)}{\sqrt{a-4a^2}}$$
$$\tilde{f}'(a) = 0 \iff -7\sqrt{a-4a^2} \pm 6\,(1-8a) = 0$$

$$\begin{aligned}
&-7\sqrt{a-4a^2} \pm 6\,(1-8a) = 0\\
&\pm 6\,(1-8a) = 7\sqrt{a-4a^2}\\
&36\,(1-8a)^2 = 49\left(a-4a^2\right)\\
&2500a^2 - 625a + 36 = 0\\
&a \in \left\{\frac{4}{25}, \frac{9}{100}\right\}
\end{aligned}$$

Provedeme-li desubstituci, dostáváme následující body, které jsou podezřelé z maxima: $[x,y] \in \left\{\left[\pm\frac{2}{5}, \pm\frac{3}{5}\right], \left[\pm\frac{3}{10}, \pm\right.\right.$

Dosadíme všechny varianty a vybereme největší a nejnižší hodnoty. Dostáváme, že maxima hodnoty $\frac{17}{4}$ nabývá f v bodech $\left[\frac{3}{10}, \frac{4}{5}\right], \left[-\frac{3}{10}, -\frac{4}{5}\right]$ a minima hodnoty -2 nabývá f v bodech $\left[\frac{2}{5}, -\frac{3}{5}\right], \left[-\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right]$.

Příklad 1 (f) $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$ a $M = \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}
&f'_x(x,y) = 2xe^{-(x^2+y^2)} + (x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)} \cdot (-2x) = 2xe^{-(x^2+y^2)}\left(1-x^2-y^2\right)\\
&f'_y(x,y) = 2ye^{-(x^2+y^2)}\left(1-x^2-y^2\right)\\
&f'_x(x,y) = 0 \iff \left(x = 0 \vee 1 = x^2+y^2\right)\\
&f'_y(x,y) = 0 \iff \left(y = 0 \vee 1 = x^2+y^2\right)
\end{aligned}$$

Z věty **??** vyplývá, že body podezřelé z extrémů jsou počátek a množina $[x^2+y^2=1]$.

$f(0,0) = 0$ a na $[x^2 + y^2 = 1]$ je f rovna $\frac{1}{e}$.

Jiný způsob:
Proveďme substituci $a = x^2 + y^2, a \in [0, \infty)$ a zkoumejme funkci $g(a) = ae^{-a}$.

$$\begin{aligned} g'(a) &= (1-a)e^{-a} \\ g'(a) &= 0 \iff a = 1 \end{aligned}$$

Funkce g je na intervalu $[0,1]$ rostoucí a na $[1, \infty)$ klesající, přičemž $g(0) = 0, g(1) = \frac{1}{e}$, $g(a) \to 0$ pro $a \to \infty$ a nuly nabývá pouze v $a = 0$. Z toho dostáváme, že funkce g nabývá svého maxima $\frac{1}{e}$ v bodě $a = 1$ a minima 0 v bodě $a = 0$.

Pak funkce f nabývá minima 0 v bodě $[0,0]$ a maxima $\frac{1}{e}$ v bodech $[x,y]$, které splňují, že $x^2 + y^2 = 1$.

Příklad 1 (g) $f(x,y) = (x+y)e^{-2x-3y}$ a $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0\}$

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= e^{-2x-3y} - 2(x+y)e^{-2x-3y} = e^{-2x-3y}(1 - 2(x+y)) \\ f'_y(x,y) &= e^{-2x-3y} - 3(x+y)e^{-2x-3y} = e^{-2x-3y}(1 - 3(x+y)) \\ f'_x &= 0 \iff x + y = \frac{1}{2} \\ f'_y &= 0 \iff x + y = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Dle věty **??** funkce f na množině $\operatorname{Int} M$ nenabývá extrémů.

Zbývá vyšetřit její hodnoty na hranici. $f(x,0) = xe^{-2x}$ a její derivace zde (tj. na x-ové poloose) nám říká, že extrému se zde nabývá pro $x = \frac{1}{2}$ - a to hodnoty $\frac{1}{2e}$. Podobně f na y-ové poloose nabývá lokálního extrému $\frac{1}{3e}$ pro $y = \frac{1}{3}$. Zřejmě má funkce f minimum 0 v bodě $[0,0]$.

Hodnota $\frac{1}{2e}$ je lokálním maximem funkce f na M. Zbývá ukázat, že jde o globální maximum. M. Chceme tedy ukázat, že Chceme tedy ukázat, že pro každé $x, y > 0$ platí $\frac{1}{2e} \geq (x+y)e^{-2x-3y}$. Upravme nerovnici.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2e} - (x+y)\frac{1}{e^{2x+3y}} &\geq 0 \\ \frac{e^{2x+3y} - 2(x+y)}{2e^{2x+3y}} &\geq 0 \\ e^{2x+3y-1} - 2(x+y) &\geq 0 \end{aligned}$$

Zderivováním funkce $g(x,y) = e^{2x+3y-1} - 2(x+y)$ zjistíme, že poslední uvedená nerovnost platí vždy (viz níže), tedy hodnota $\frac{1}{2e}$ skutečně globálním maximem f na M.

$$\begin{aligned} g'_x(x,y) &= 2\left(e^{2x+3y-1} - 1\right) \\ g'_y(x,y) &= 3e^{2x+3y-1} - 2 \\ g'_x &= 0 \iff 2x + 3y - 1 = 0 \\ g'_y &= 0 \iff 2x + 3y - 1 = \ln\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Uvažujme pevně dané $y \geq 0$. V x-ovém směru pak funkce g klesá do $x = \frac{1}{2}(1-3y)$, pak roste. Platí $g\left(\frac{1}{2}(1-3y)\right) = y \geq 0$. Pokud tedy $g(0,y) \geq 0$, pak je $g(x,y) \geq 0$ pro každé $x \geq 0$. Ukažme nyní, že

$g(0,y) \geq 0$ pro $y \geq 0$. Pro $y=0$ je to zřejmé. Funkce g v y-ovém směru klesá do $y = \frac{1}{3}\left(\ln\frac{2}{3}+1\right)$ a pak roste (vidno z g_y'). Platí, že $g\left(0, \frac{1}{3}\left(\ln\frac{2}{3}+1\right)\right) = -\frac{2}{3}\ln\frac{2}{3} > 0$. Nejmenší hodnota funkce g na kladné poloose y je tedy kaladná, g je proto na kladné poloose y kladná, což jsme chtěli dokázat.

Příklad 1 (h) $f(x,y) = (x+y)e^{-2x-3y}$ a $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x > 0, y > 0\}$

Podobně jako v předchozím příkladě dojdeme k tomu, že f nenabývá na M extrémů. Můžeme tedy jen určit supremum a infimum.Stejně jako v předchozím příkladu se ukáže, že $\frac{1}{2e}$ je horní závorou množiny $f(M)$ a 0 dolní závorou.

Ukážeme nyní, že se k hodnotám $0, \frac{1}{2e}$ lze libovolně přiblížit - z toho plyne, že jde skutečně o infimum a supremum.

Hledáme posloupnost bodů $[x_n, y_n] \in M$ t.ž. $f(x_n,y_n) \to 0$. Víme, že $f(0,0) = 0$ a že f je spojitá. Stačí tedy volit posloupnost tak, aby konvergovala k 0 a pak ze spojitosti f a Heineho věty dostáváme, že $f(x_n,y_n) \to 0$. Posloupnost lze volit např. takto: $x_n = y_n = \frac{1}{n}$.

Stejnou myšlenkou dostáváme, že stačí najít posloupnost bodů $[x_n, y_n] \in M$ t.ž. konvergují k bodu $\left[\frac{1}{2}, 0\right]$. Body lze volit např. takto: $x_n = \frac{1}{2}, y_n = \frac{1}{n}$.

Příklad 1 (i) $f(x,y) = (x^2+5y^2)e^{-(3x^2+y^2)}$ a $M = \mathbb{R}^2$

Derivujme funkci f - tím dle věty **??** získáme body podezřelé z extrému.

$$
\begin{aligned}
&f_x'(x,y) = 2xe^{-(3x^2+y^2)} + (x^2+5y^2)e^{-(3x^2+y^2)}(-6x) = e^{-(3x^2+y^2)}\left(2x - 6x^3 - 30xy^2\right)\\
&f_y'(x,y) = e^{-(3x^2+y^2)}\left(10y - 2yx^2 - 10y^3\right)\\
&f_x' = 0 \iff 2x\left(1 - 3x^2 - 15y^2\right) = 0 \iff \left(x = 0 \vee x^2 = \frac{1}{3} - 5y^2\right)\\
&f_y' = 0 \iff 2y\left(5 - x^2 - 5y^2\right) = 0 \iff \left(y = 0 \vee x^2 = 5 - 5y^2\right)
\end{aligned}
$$

Body podezřelé z extrému jsou $[0,0], [0,\pm 1]$ a $\left[\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right]$.

$$
\begin{aligned}
&f(0,0) = 0\\
&f(0,1) = f(0,-1) = \frac{5}{e}\\
&f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right) = \frac{1}{3e}
\end{aligned}
$$

Zřejmě pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ platí, že $f(x,y) \geq 0$. Funkce f tedy nabývá svého minima 0 v bodě $[0,0]$.

Podobně jako dříve se ukáže, že $\frac{5}{e}$ je globální maximum.

Příklad 2 (a) $f(x,y,z) = x - 2y + 2z$ a $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x^2+y^2+z^2 = 1\}$

Použijeme větu **??** (Lagrangeova věta o multiplikátoru) - ta nám dá body podezřelé z extrémů (pro funkci f na množině M). Zadefinujme funkci $g(x,y) := x^2+y^2+z^2-1$. Pak $M = [g = 0]$.

Spočtěme parciální derivace g a vyjádřeme ∇g.

$$
\begin{aligned}
&g_x'(x,y,z) = 2x\\
&g_y'(x,y,z) = 2y\\
&g_z'(x,y,z) = 2z\\
&\nabla g(x,y,z) = (2x, 2y, 2z)
\end{aligned}
$$

Platí následující.

$$\nabla g = 0 \iff 2x = 2y = 2z = 0 \iff x = y = z = 0 \iff [x, y, z] = [0, 0, 0]$$

Jelikož jediný bod, ve kterém má g nulový gradient, se nachází mimo M ($[0, 0, 0] \notin M$), tak z podmínky *(I)* neodstáváme žádné body podezřelé z extrémů. Vyšetřeme nyní podmínku *(II)*.

$$\begin{aligned}
&f'_x(x, y, z) = 1\\
&f'_y(x, y, z) = -2\\
&f'_z(x, y, z) = 2\\
&\nabla f(x, y, z) = (1, -2, 2)
\end{aligned}$$

Pak rovnost $\nabla f(x, y, z) + \lambda \nabla g(x, y, z) = 0$ nám dává následující soustavu.

$$\begin{aligned}
&1 + \lambda 2x = 0\\
&-2 + \lambda 2y = 0\\
&2 + \lambda 2z = 0
\end{aligned}$$

Vyjádřením λ dostáváme následující sadu podmínek (všimněme si, že pokud by x, y nebo z bylo nulové, pak by příslušná rovnice nemohla být splněna, tedy BÚNO $x, y, z \neq 0$).

$$\begin{aligned}
&\lambda = \frac{-1}{2x}\\
&\lambda = \frac{2}{2y} = \frac{1}{y}\\
&\lambda = \frac{-2}{2z} = \frac{-1}{z}\\
&\lambda = \frac{-1}{2x} = \frac{1}{y} = \frac{-1}{z}\\
&\frac{1}{y} = \frac{-1}{z} \implies y = -z\\
&\frac{-1}{2x} = \frac{-1}{z} \implies \frac{z}{2} = x
\end{aligned}$$

Společně s tím, že bod podezřelý z extrému by měl být prvkem množiny M dostávme následující soustavu.

$$\begin{aligned}
&x^2 + y^2 + z^2 = 1\\
&y = -z\\
&x = \frac{z}{2}
\end{aligned}$$

Dosazením posledních dvou rovnic do první dostáváme:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{z}{2}\right)^2 + (-z)^2 + z^2 = 1 \\
&\frac{z^2}{4} + 2z^2 = 1 \\
&z^2 \cdot \frac{9}{4} = 1 \\
&z^2 = \frac{4}{9}, \quad z = \pm\frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Podezřelými body z extrémů tedy jsou (pomocí z získáme x, y): $\left[\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right], \left[-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right]$.

Dle věty **??** lze snadno ukázat, že M je kompaktní a z věty **??** plyne, že f nabývá na M extrémů. Z věty **??** jsme dostali jediné dva body podezřelé z maxima. Vyšetřeme funkční hodnoty f v těchto bodech.

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) &= \frac{1}{3} + \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{9}{3} = 3 \\
f\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) &= \frac{-1}{3} - \frac{4}{3} - \frac{4}{3} = -3
\end{aligned}$$

Dostáváme, že f nabývá maxima 3 na mn. M v $\left[\frac{1}{3} - \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right]$ a minima -3 v $\left[-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right]$.

Příklad 2 (b) $f(x,y,z) = x - 2y + 2z$ a $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 0\}$

Použijeme větu **??**. Použijeme větu **??**. Zadefinujme $g_1(x,y,z) := x^2+y^2+z^2-1, g_2(x,y,z) := x+y+z$. Pak $M = [g_1 = 0, g_2 = 0]$. Pak platí:

$$\begin{aligned}
&(g_1)'_x(x,y,z) = 2x \\
&(g_1)'_y(x,y,z) = 2y \\
&(g_1)'_z(x,y,z) = 2z \\
&\nabla g_1(x,y,z) = (2x, 2y, 2z) \\
&(g_2)'_x(x,y,z) = 1 \\
&(g_2)'_y(x,y,z) = 1 \\
&(g_2)'_z(x,y,z) = 1 \\
&\nabla g_2(x,y,z) = (1,1,1)
\end{aligned}$$

Platí následující.

$$\nabla g_1 = k \cdot \nabla g_2 \iff 2x = 2y = 2z = k \iff x = y = z = \frac{k}{2}$$

Pokud by existoval bod $[x,y,z] \in M$ a $k \in \mathbb{R}$ takové, že $\nabla g_1 = k \cdot \nabla g_2$, pak by muselo platit, že $k = 0 = x = y = z$ (z podmínky $g_2 = 0$ na M). To je ale v rozporu s tím, že $g_1 = 0$. Odsud tedy nedostáváme žádný podezřelý bod.

K vyšetření podmínky *(II)* spočtěme parciální derivace f.

$$\begin{aligned}
&f'_x(x,y,z) = 1 \\
&f'_y(x,y,z) = -2 \\
&f'_z(x,y,z) = 2 \\
&\nabla f(x,y,z) = (1, -2, 2)
\end{aligned}$$

Rovnice $\nabla f + \alpha \nabla g_1 + \beta \nabla g_2 = 0$ a $g_1 = 0 = g_2$ dává následující soustavu.

$$\begin{aligned}
&1 + 2\alpha x + \beta = 0 \\
&-2 + 2\alpha y + \beta = 0 \\
&2 + 2\alpha z + \beta = 0 \\
&x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\
&x + y + z = 0
\end{aligned}$$

Z prvních tří rovnic dostáváme $-\beta = 1 + 2\alpha x = -2 + 2\alpha y = 2 + 2\alpha z$. Z toho plyne následující.

$$\begin{aligned}
&2\alpha(x - y) = -3 \\
&2\alpha(y - z) = 4 \\
&x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\
&x + y + z = 0
\end{aligned}$$

Z prvních dvou rovností speciálně plyne, že $\alpha, x - y, y - z \neq 0$ (neb součin není roven nule, tedy ani činitelé nemohou být rovny nule). Můžeme tedy první dvě rovnosti podělit, čímž dostaneme:$2\alpha = \frac{-3}{x-y} = \frac{4}{y-z}$. Z toho přenásobením jmenovateli dostáváme, že $-3y + 3z = 4x - 4y$. Máme tedy soustavu:

$$\begin{aligned}
&y = 4x - 3z \\
&x + y + z = 0 \implies x = -y - z \\
&x^2 + y^2 + z^2 = 1
\end{aligned}$$

První dvě rovnosti dávají $y = -4y - 4z - 3z \implies -7z = 5y \implies z = -\frac{5}{7}y$.

Z toho dále plyne, že $x = -y - z = -y + \frac{5}{7}y = -\frac{2}{7}y$. Dosadíme do poslední rovnice a dostáváme následující.

$$\begin{aligned}
\left(-\frac{2}{7}y\right)^2 + y^2 + \left(-\frac{5}{7}y\right)^2 &= 1 \\
\frac{4}{49}y^2 + y^2 + \frac{25}{49}y^2 &= 1 \\
\frac{78}{49}y^2 &= 1 \\
y^2 &= \frac{49}{78}
\end{aligned}$$

Celkově podezřelými body jsou: $\left[-\frac{2}{\sqrt{78}}, \frac{7}{\sqrt{78}}, -\frac{5}{\sqrt{78}}\right], \left[\frac{2}{\sqrt{78}}, -\frac{7}{\sqrt{78}}, \frac{5}{\sqrt{78}}\right]$.

Dle věty **??** lze snadno ukázat, že M je kompaktní a z věty **??** plyne, že f nabývá na M extrémů. Z věty **??** jsme dostali jediné dva body podezřelé z maxima. Vyšetřeme funkční hodnoty f v těchto bodech.

$$\begin{aligned}
&f\left(-\frac{2}{\sqrt{78}}, \frac{7}{\sqrt{78}}, -\frac{5}{\sqrt{78}}\right) = \frac{-2 - 14 - 10}{\sqrt{78}} = \frac{-26}{\sqrt{78}} \\
&f\left(\frac{2}{\sqrt{78}}, -\frac{7}{\sqrt{78}}, \frac{5}{\sqrt{78}}\right) = \frac{26}{\sqrt{78}}
\end{aligned}$$

Maximum: $\frac{26}{\sqrt{78}}$ v $\left[\frac{2}{\sqrt{78}}, -\frac{7}{\sqrt{78}}, \frac{5}{\sqrt{78}}\right]$, minimum: $\frac{-26}{\sqrt{78}}$ v $\left[-\frac{2}{\sqrt{78}}, \frac{7}{\sqrt{78}}, -\frac{5}{\sqrt{78}}\right]$.

Příklad 2 (c) $f(x,y,z) = xyz$ a $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x^2+y^2+z^2 \leq 1, x+y+z \geq 0\}$
Zřejmě $\operatorname{Int} M \neq \emptyset$. Proto vyšetříme funkci f na $\operatorname{Int} M$ a pak na $H(M)$.
K vyšetření extrémů na $\operatorname{Int} M$ použijeme větu **??**.

$$\begin{aligned} f'_x(x,y,z) &= yz \\ f'_y(x,y,z) &= xz \\ f'_z(x,y,z) &= xy \end{aligned}$$

Dle věty **??** dostáváme, že bod $[0,0,0] \in M$ je bodem podezřelým z extrému.
Nyní vyšetřeme chování f na hranici. Zadefinujme

$$g_1(x,y,z) := x^2+y^2+z^2-1, \quad g_2(x,y,z) := x+y+z.$$

Z definice hranice lze ukázat, že $H(M) = ([g_1=0]\cap M) \cup ([g_2=0]\cap M) = [g_1=0, g_2 \geq 0] \cup [g_2=0, g_1 \leq 0] = [g_1=0, g_2>0] \cup [g_2=0=g_1] \cup [g_2=0, g_1<0]$. Vyšetřeme tedy chování funkce f na všech třech množinách v posledn rovnosti - použijeme věty **??**, **??**. Spočtěme nejdříve parciální derivace funkcí g_1, g_2.

Poznámka: je třeba to takto rozdělit, neb větu **??** lze použít jen pro G otevřenou. Nelze tedy zkoumat $[g_1=0, g_2 \geq 0]$ pomocí věty **??**, ale pouze množinu $[g_1=0, g_2>0]$.

$$\begin{aligned} (g_1)'_x(x,y,z) &= 2x, &\quad (g_2)'_x(x,y,z) &= 1 \\ (g_1)'_y(x,y,z) &= 2y, &\quad (g_2)'_x(x,y,z) &= 1 \\ (g_1)'_z(x,y,z) &= 2z, &\quad (g_2)'_z(x,y,z) &= 1 \end{aligned}$$

• $[g_1=0, g_2>0]$ Použijeme větu **??** na množinu $\{x \in [g_2>0] \colon g_1(x)=0\}$ (G ze znění věty je tedy ot. mn. $[g_2>0]$).

(I):

$$\nabla g_1 = 0 \iff [x,y,z] = [0,0,0]$$

Počátek nesplňuje podmínku $g_1=0$, nedostáváme tedy podezřelý bod.

(II):

Rovnice $\nabla f + \lambda \nabla g_1 = 0$ společně s $g_1=0$ a $x+y+z \geq 0$ dává následující soustavu.

$$\begin{aligned} yz + 2\lambda x &= 0 \\ xz + 2\lambda y &= 0 \\ xy + 2\lambda z &= 0 \\ x^2+y^2+z^2 &= 1 \\ x+y+z &> 0 \end{aligned}$$

První tři rovnice dávají: $2\lambda x = -yz, 2\lambda y = -xz, 2\lambda z = -xy$. Je-li $\lambda = 0$, pak musí alespoň dvě z x,y,z být nulové. Z podmínky $g_2 > 0$, pak dostáváme, že zbylá musí být kladná. Podmínka $g_1 = 0$ pak dává, že zbylá proměnná musí být rovna jendé. Dostáváme tedy body $[1,0,0], [0,1,0], [0,0,1]$.

Předpokládejme nyní, že $\lambda \neq 0$. Pak je-li jedna z proměnných x, y, z nulová, musí být všechny nulové (neb $2\lambda x = -yz, 2\lambda y = -xz, 2\lambda z = -xy$). Můžeme tedy předpokládat, že $x, y, z \neq 0$. Ze zmíněných rovností pak dostáváme následující.

$$\lambda = \frac{-yz}{2x} = \frac{-xz}{2y} = \frac{-xy}{2z} \implies x = \pm y, \quad z = \pm y$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \implies y^2 = \frac{1}{3}$$
$$x + y + z \geq 0 \implies \text{ podezřelé body jsou: } \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right], \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right], \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \mp\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$$

Podezřelými body z této části hranice jsou:

$$[0,0,0], [1,0,0], [0,1,0], [0,0,1], \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right], \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right], \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \mp\frac{1}{\sqrt{3}}\right].$$

• $[g_2 = 0, g_1 < 0]$ věta **??** pro $G = [g_1 < 0]$
(I): $\nabla g_1 \neq 0 \implies$ žádné podezřelé body.
(II)
Rovnice $\nabla f + \lambda \nabla g_2 = 0$ spolu s $[x, y, z] \in [g_2 = 0, g_1 < 0]$ dává následující.

$$\begin{aligned} yz + \lambda &= 0 \\ xz + \lambda &= 0 \\ xy + \lambda &= 0 \\ x + y + z &= 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 &< 1 \end{aligned}$$

První tři rovnice, podobně jako výše, dávají, že alespoň dvě z proměnných x, y, z jsou nulové. Podmínka $x + y + z = 0$ pak dává, že nutně $x = y = z = 0$. Počátek je již zahrnut v podezřelých bodech.
Nedostali jsme tedy žádné nové podezřelé body.
• $[g_1 = 0 = g_2]$ Použijeme větu **??**.
(I):

$$\nabla g_1 = k \cdot \nabla g_2 \implies k = 2x = 2y = 2z \implies x = y = z$$

Zároveň chceme, aby $g_2(x, y, z) = 0$, z čehož plyne, že $x = y = z = 0$ a počátek již máme zahrnut v podezřelých bodech.
(II):
Rovnost $\nabla f + \alpha \nabla g_1 + \beta \nabla g_2 = 0$ společně s $g_1 = 0 = g_2$ dostáváme nsáledující soustavu.

$$\begin{aligned} yz + 2\alpha x + \beta &= 0 \\ xz + 2\alpha y + \beta &= 0 \\ xy + 2\alpha z + \beta &= 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 1 \\ x + y + z &= 0 \end{aligned}$$

První tři rovnosti dávají: $-\beta = yz + 2\alpha x = xz + 2\alpha y = xy + 2\alpha z$, což dává:

$$\begin{aligned}
&2\alpha(x-y) = z(x-y)\\
&2\alpha(y-z) = x(y-z)\\
&x^2+y^2+z^2 = 1\\
&x+y+z = 0
\end{aligned}$$

Pokud $x-y=0$, pak dostáváme z $x+y+z=0$, že $z=-2x$. Dosadíme do předposlední rovnice a dostaneme:

$$2x^2 + (-2x)^2 = 1 \implies 6x^2 = 1 \implies x = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Podezřelé body: $\left[\pm\frac{1}{\sqrt{6}}, \pm\frac{1}{\sqrt{6}}, \mp\frac{2}{\sqrt{6}}\right]$

Pokud $x-y \neq 0$, budeme uvažovat dvě situace: $y-z=0$ $y-z\neq 0$. Obě situace dopadnou velmi analogicky a dostaneme následující body: $\left[\mp\frac{2}{\sqrt{6}}, \pm\frac{1}{\sqrt{6}}, \pm\frac{1}{\sqrt{6}}\right]$, $\left[\pm\frac{1}{\sqrt{6}}, \mp\frac{2}{\sqrt{6}}, \pm\frac{1}{\sqrt{6}}\right]$

Celkově podezřelými body jsou:

$$[0,0,0],[1,0,0],[0,1,0],[0,0,1],\left[\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right],\left[-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right],\left[\frac{1}{\sqrt{3}},\pm\frac{1}{\sqrt{3}},\mp\frac{1}{\sqrt{3}}\right],$$
$$\left[\pm\frac{1}{\sqrt{6}},\mp\frac{2}{\sqrt{6}},\pm\frac{1}{\sqrt{6}}\right],\left[\mp\frac{2}{\sqrt{6}},\pm\frac{1}{\sqrt{6}},\pm\frac{1}{\sqrt{6}}\right],\left[\pm\frac{1}{\sqrt{6}},\pm\frac{1}{\sqrt{6}},\mp\frac{2}{\sqrt{6}}\right].$$

Dle věty **??** lze snadno ukázat, že M je kompaktní a z věty **??** plyne, že f nabývá na M extrémů. Vyšetřeme hodnoty f v podezřelých bodech.

$$\begin{aligned}
&f(0,0,0) = f(1,0,0) = f(0,1,0) = f(0,0,1) = 0\\
&f\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{3\sqrt{3}}\\
&f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{3\sqrt{3}}\\
&f\left(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = f\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}}\right) = f\left(-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = -\frac{1}{3\sqrt{6}}\\
&f\left(-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = f\left(\frac{2}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\right) = \frac{1}{3\sqrt{6}}
\end{aligned}$$

Maximum: $\frac{1}{3\sqrt{3}}$ v $\left[\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$, minimum: $-\frac{1}{3\sqrt{3}}$ v $\left[-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$, $\left[\frac{1}{\sqrt{3}},\pm\frac{1}{\sqrt{3}},\mp\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$.

Příklad 2 (d) $f(x,y,z) = \sin x \cdot \sin y \cdot \sin z$ a $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x+y+z = \frac{\pi}{2}, x>0, y>0, z>0\}$

Použijeme větu **??**. Zadefinujme $g(x,y,z) := x+y+z-\frac{\pi}{2}, G := [x>0, y>0, z>0]$. Pak $M = \{x \in G\colon g(x) = 0\}$ a G je otevřená (víme z teorie ze 2. cvičení).

$$\begin{aligned}
&g'_x(x,y,z) = 1\\
&g'_y(x,y,z) = 1\\
&g'_z(x,y,z) = 1
\end{aligned}$$

Platí : $\nabla g \neq 0$. Podmínka *(I)* nám tedy nedává žádné body podezřelé z extrému.
K vyšetření podmínky *(II)* spočtěme parciální derivace f.

$$f'_x(x,y,z) = \cos x \cdot \sin y \cdot \sin z$$
$$f'_y(x,y,z) = \sin x \cdot \cos y \cdot \sin z$$
$$f'_z(x,y,z) = \sin x \cdot \sin y \cdot \cos z$$

Rovnice $\nabla f + \lambda \nabla g = 0$ dává následující soustavu.

$$\cos x \cdot \sin y \cdot \sin z + \lambda = 0$$
$$\sin x \cdot \cos y \cdot \sin z + \lambda = 0$$
$$\sin x \cdot \sin y \cdot \cos z + \lambda = 0$$

Jejím vyřešením dostáváme:

$$\cos x \cdot \sin y = \sin x \cdot \cos y$$
$$\cos y \cdot \sin z = \sin y \cdot \cos z$$
$$\cos y \cdot \sin z = \sin x \cdot \cos z$$

Soustavu mimo jiné řeší zřejmě body, pro které $\cos x = \cos y = \cos z = 0$, nebo $\sin x = \sin y = \sin z = 0$. To ale nemůže nastat pro $[x,y,z] \in M$, neb z definice M plyne, že speciálně $x,y,z \in (0,\pi/2]$. Můžeme tedy předpokládat, že veškeré cos a sin v předchozí soustavě jsou nenulové, můžeme jimi tedy dělit.Dostáváme, že $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y = \operatorname{tg} z$. Tedy $x = y + k\pi = z + l\pi$ pro vhodná $k, l \in \mathbb{Z}$. Vezmeme-li v úvahu, že $x,y,z \in (0,\frac{\pi}{2}]$, dostáváme, že $k = l = 0$. Tedy $[x,y,z] = [a,a,a]$ pro vhodné $a \in (0,\frac{\pi}{2}]$. Z podmínky $x + y + z = \frac{\pi}{2}$ pak plyne, že $a = \frac{\pi}{6}$.

Celkově podezřelými body jsou: $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$.

$f\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right) = \left(\sin\frac{\pi}{6}\right)^2 = \frac{1}{8}$.

Zřejmě množina M je obsažena v množině $M' = \left[g = 0, x,y,z \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right]$, která je kompaktní. Z věty **??** vyplývá, že f na M' nabývá extrémů a lze ukázat, že f na M' nabývá maxima v $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$. Z toho dostáváme, že $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$ je skutečně bod, ve kterém f nabývá maxima na množině M, neb $\sup_M f \leq \sup_{M'} f$ a f.

Minima se nenabývá, neb jsme neodhalili žádný další bod podezřelý z extrému.

Příklad 2 (e) $f(x,y,z) = xy^2z^3$ a $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x + 2y + 3z = a, x > 0, y > 0\}, a > 0$

Množina M je polorovinou v $\mathbb{R}^3$ - rovnice $x + 2y + 3z = a$ určuje rovinu a podmínka $x,y > 0$ z ní vysekne jen „půlku“.

Použijeme větu **??**. Zadefinujme $g(x,y,z) := x + 2y + 3z - a$. Pak $M = [g = 0] \cap [x > 0, y > 0]$.

$$g'_x(x,y,z) = 1$$
$$g'_y(x,y,z) = 2$$
$$g'_z(x,y,z) = 3$$

Platí následující.

$$\nabla g \neq 0$$

Z podmínky *(I)* nedostáváme žádný podezřelý bod.

K vyšetření podmínky *(II)* spočtěme parciální derivace f. (a je konstanta, čili zderivuje se na 0)

$$\begin{aligned} f'_x(x,y,z) &= y^2z^3 \\ f'_y(x,y,z) &= 2xyz^3 \\ f'_z(x,y,z) &= 3xy^2z^2 \end{aligned}$$

Rovnice $\nabla f + \lambda \nabla g = 0$ dává následující soustavu.

$$\begin{aligned} &y^2z^3 + \lambda = 0 \\ &2xyz^3 + 2\lambda = 0 \\ &3xy^2z^2 + 3\lambda = 0 \end{aligned}$$

Pokud by $\lambda = 0$, pak by muselo platit, že $y^2z^3 = 2xyz^3 = 3xy^2z^2 = 0$, z čehož plyne, že by muselo alespoň jedno z x, y, z být rovno 0. Pak by ovšem nešlo o bod množiny M. Naopak, pokud $\lambda \neq 0$, pak nemůže ani jedno z x, y, z být rovno nule a těmito proměnnými můžeme dělit.

Vyřešením soustavy pro $\lambda \neq 0$ dostáváme:

$$-\lambda = y^2z^3 = xyz^3 = xy^2z^2 \implies y = x = z$$

Dosazením do rovnosti $x + 2y + 3z = a$ dostáváme: $6x = a$, tedy $x = \frac{a}{6}$.

Celkově podezřelými body jsou: $\left[\frac{a}{6}, \frac{a}{6}, \frac{a}{6}\right]$.

Jelikož nám vyšel jediný podezřelý bod, zbývá nám zjistit, zda jde o minimum, či maximum. Platí, že $f\left(\frac{a}{6}, \frac{a}{6}, \frac{a}{6}\right) = \left(\frac{a}{6}\right)^6$.

Jelikož množina $M' := [g = 0] \cap [x \in [\frac{a}{7}, \frac{a}{5}]] \cap [y \in [\frac{a}{7}, \frac{a}{5}]]$ je kompaktní (omezená a uzavřená) a jde o podmonžinu M obsahující bod $\left[\frac{a}{6}, \frac{a}{6}, \frac{a}{6}\right]$, lze ukázat, že f v $\left[\frac{a}{6}, \frac{a}{6}, \frac{a}{6}\right]$ nabývá lokálního maxima pomocí věty **??** (nabývá tam maxima vzhledem k mn. M'). Ukažme nyní, že jde o maximum na množině M (a nikoli jen o lokální maximum). Zřejmě, aby byla hodnota f velká, musí být $z > 0$. Proto stačí uvažovat jen takové body množiny M, pro které $z > 0$. Jelikož $z = \frac{a-2y-x}{3}$, je třeba, aby $a - 2y - x > 0$, aby bylo z kladné. Tj. je potřeba, aby $x + 2y < a$. Speciálně $x < a, y < \frac{a}{2}$. Stačí tedy zkoumat následující.

$\sup\left\{xy^2z^3 \colon x \in (0,a), y \in \left(0, \frac{a}{2}\right), z = \frac{a-x-2y}{3}\right\} = \sup\{xy^2\frac{1}{27}\left(a - x - 2y\right)^3 : x \in (0,a), y \in \left(0, \frac{a}{2}\right)\}$.

TODO

Uvědomme si nejdříve, že pokud bychom dosadili krajní hodnoty (tj. vyzkoušeli bychom $x = 0, y = 0, x = a, y = \frac{a}{2}$), dostali bychom, že $f \leq 0$. Supremum tedy nebude v krajních bodech.

Uvažujme nejdříve $y \in \left(0, \frac{a}{2}\right)$ pevně dané. Zkoumáme tedy $g(x) = xy^2\frac{1}{27}\left(a - x - 2y\right)^3$ na intervalu $(0, a)$. Funkci g zderivujeme, abychom vyšetřili její extrémy.

$$g'(x) = \frac{y^2}{27}\left(a - x - 2y\right)^3 - \frac{xy^2}{9}\left(a - x - 2y\right)^2 = \frac{y^2}{27}\left(a - x - 2y\right)^2\left(a - 4x - 2y\right)$$

Body podezřelé z extrému pro funkci g jsou $a - x - 2y = 0 \implies x = a - 2y, a - 4x - 2y = 0 \implies x = \frac{a}{4} - \frac{y}{2}$. Platí, že $g(a - 2y) = 0$ a $g\left(\frac{a}{4} - \frac{y}{2}\right) = \left(\frac{a}{4} - \frac{y}{2}\right)\frac{y^2}{27}\left(\frac{3}{4}a - \frac{3}{2}y\right)^3$.

Zkoumejme nyní maximum funkce $h(y) = \left(\frac{a}{4} - \frac{y}{2}\right)\frac{y^2}{27}\left(\frac{3}{4}a - \frac{3}{2}y\right)^3$ pro $y \in \left(0, \frac{a}{2}\right)$.

$$h'(y) = \frac{1}{128}y(a - 6y)(a - 2y)^3.$$

Podezřelým bodem na intervalu $\left(0, \frac{a}{2}\right)$ je: $y = \frac{a}{6}$. A v daném bodě je $x = y = z = \frac{a}{6}$ a $f = \frac{a^6}{6^6}$. Jde o jediný bod podezřelý z extrému, ve kterém vychází kladná hodnota. Jde tedy o supremum, jež jsme hledali. Máme tedy, že $\sup_M f = \sup\left\{xy^2z^3 \colon x \in (0,a), y \in \left(0, \frac{a}{2}\right), z = \frac{a-x-2y}{3}\right\} = \left(\frac{a}{6}\right)$.

Funkce f nenabývá na množině M minima, neb nám nevyšel žádný další bod podezřelý z extrému.

Příklad 2 (f) $f(x,y) = x^2 + y$ a $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; 4y^3 - 4y + x^2 = 0, y \geq 0\}$
Zadefinujme $g(x,y) := 4y^3 - 4y + x^2$. Pak $M = [g = 0] \cap [y \geq 0]$.

Všimněme si, že M je kompaktní: Aby $x^2 = 4y - 4y^3 \geq 0$, musí platit, že $y \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ (uvažujeme-li jen body z M). Tedy platí, že $M = [g = 0] \cap \left[y \in \left[0, \frac{1}{2}\right]\right]$. Dle teorie z 2. cvičení je M kompaktní. Dle věty **??** dostáváme, že f jakožto spojitá funkce nabývá na M extrémů. Nalezněme tedy její lokální minima a maxima. Pak největší a nejmenší nám dají globální maxima a minima.

Použijeme větu **??**. Pro $G = [y > 0]$ můžeme použít větu **??** (je potřeba, aby G byla ot.). Navíc vyšetříme chování funkce f na $[g = 0] \cap [y = 0]$: pokud $y = 0, [x,y] \in M$, pak $x = 0$. K podezřelým bodům tedy zařadíme ještě počátek.

$$
\begin{aligned}
g'_x(x,y) &= 2x \\
g'_y(x,y) &= 12y^2 - 4
\end{aligned}
$$

Platí následující.

$$\nabla g = 0 \iff 2x = 0 = 12y^2 - 4 \iff x = 0, y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Dostáváme pozezřelý bod: $\left[0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$ (neb $y > 0$ dle volby G).
K vyšetření podmínky *(II)* spočtěme parciální derivace f.

$$
\begin{aligned}
f'_x(x,y) &= 2x \\
f'_y(x,y) &= 1
\end{aligned}
$$

Rovnice $\nabla f + \lambda \nabla g = 0$ dává následující soustavu.

$$
\begin{aligned}
2x + 2\lambda x &= 0 \\
1 + \lambda\left(12y^2 - 4\right) &= 0
\end{aligned}
$$

Jejím vyřešením dostáváme za podmínky $[x,y] \in M$:

$$
\begin{aligned}
&\lambda = -1 \implies y = \sqrt{\frac{5}{12}}, x = \pm 2\sqrt{y - y^3} = \pm 2\sqrt{\sqrt{\frac{5}{12}} - \left(\sqrt{\frac{5}{12}}\right)^3} = \pm\sqrt{\frac{7}{3}\sqrt{\frac{5}{12}}} \\
&x = 0, 12y^2 - 4 \neq 0 \implies 4y^3 - 4y = 0 \implies y = 0 \lor y = 1
\end{aligned}
$$

Celkově podezřelými body jsou: $\left[\pm\sqrt{\frac{7}{3}\sqrt{\frac{5}{12}}}, \sqrt{\frac{5}{12}}\right], [0,0], [0,1], \left[0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$.

Vyšetřeme hodnoty funkce f v uvedených bodech. Pak největší hodnota nám dá maximum a nejmenší minimum.

$$
\begin{aligned}
&f\left(\pm\sqrt{\frac{7}{3}\sqrt{\frac{5}{12}}},\sqrt{\frac{5}{12}}\right)=\frac{7}{3}\sqrt{\frac{5}{12}}+\sqrt{\frac{5}{12}}=\frac{10}{3}\sqrt{\frac{5}{12}}\\
&f\left(0,0\right)=0\\
&f\left(0,1\right)=1\\
&f\left(0,\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}
\end{aligned}
$$

Zřejmě $\frac{10}{3}\sqrt{\frac{5}{12}} > \frac{1}{\sqrt{3}}$. Tedy maximum: $\frac{1}{\sqrt{3}}$ v $\left[\pm\sqrt{\frac{7}{3}\sqrt{\frac{5}{12}}},\sqrt{\frac{5}{12}}\right]$ a minimum: 0 v $[0,0]$.